4 - апта.

Квадраттық иррационалдықты интегралдау. Дербес жағдайлар.

$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[\text{ь}]{\frac{x+1}{x-1}}dx$ интегралын есепте.

Мынадай белгілеу енгіземіз: $t^3 = \frac{x+1}{x-1}, \quad x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad dx = \frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2}, \quad x-1 = \frac{2}{t^3-1},$

нәтижесінде: $\int t \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \cdot \frac{(t^3-1)^2}{4} dt = -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{8}t^4 + C = -\frac{3}{8} \cdot \frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$

Бұл түрдегі интегралдарға $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots)dx$ интегралы да жатады, белгілеуінің арқасында интеграл астындағы өрнек рационал функцияға келеді, мұндағы k – барлық x бөлшек көрсеткіштерінің ортақ бөлімі.

*Мысал 1.

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$$ тап.

Мынадай белгілеу енгізсек: $x = t^4,\ dx = 4t^3dt,$

$$\int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt = 4\int (1+\frac{t-1}{t^2+1})dt = 4(\int dt + \int \frac{tdt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}) = 4t + 2\ln(t^2+1) - 4arctgt + C.$$

x   айнымалысына қайта оралсақ, ізделінді интегралдың жауабына келеміз:

$$4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4arctg\sqrt[4]{x} + C.$$

*Мысал 2.

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx = \left| x = 2\sin t,\ dx = 2\cos t dt \right| = \int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t} 2\cos t dt = \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = \frac{1}{4}\int \frac{ctg^4 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int ctg^4 t dctgt = -\frac{1}{20}ctg^5 t + C = C - \frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

*Мысал 3.

* $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ тап.

Мына белгілеулерді енгізсек $x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2},\ \sqrt{x^2-2x-1}=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$, онда

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=-\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

*Мысал 4.